Lekcja 19 – Dowodzenie oraz logika w algebrze

Zadanie 1. (0−2)

Uzasadnij, że liczba

$$16^9$$

Jest większa od liczby

$$12^{10}$$

Odpowiedź

Zadanie 2. (0–2)

Uzasadnij, że liczba 1400 posiada 24 różne dzielniki naturalne.

Odpowiedź

Zadanie 3. (0−2)

Do liczby dwucyfrowej w której cyfra dziesiątek wynosi d, a cyfra jedności j dodano liczbę dwucyfrową, w której cyfra dziesiątek wynosi j, a cyfra jedności to 0. **Wykaż, że kwadrat tej sumy wynosi**

$$\mathbf{100d^2 + 220dj + 121j^2}$$

Odpowiedź

Zadanie 4.1 (0−2)

W matematyce zależność w postaci

$$y = ax + b$$

Nazywamy zależnością liniową.

Wykaż, że jeżeli $a \neq 0$ to

$$\mathbf{x = \frac{y - b}{a}}$$

Odpowiedź

Zadanie 4.2* (0−2)

W matematyce zależność w postaci

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Nazywamy zależnością kwadratową

Wykaż, że jeżeli $a \neq 0$ oraz $\frac{y-q}{a} > 0$ to

$$\mathbf{x_1 = p + \sqrt{\frac{y-q}{a}}} \qquad \textbf{lub} \qquad \mathbf{x_2 = p - \sqrt{\frac{y-q}{a}}}$$

Odpowiedź

Zadanie 5. (0−2)

Wykaż, że suma w postaci

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n}$$

Wynosi

$$\frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$

Odpowiedź

Zadanie 6. (0−2)

Uzasadnij, że liczba

$$23571103xy52$$

w której miejsce x i y zajmuje cyfra 1 lub 7 jest zawsze niepodzielna przez 12.

Odpowiedź

Zadanie 7. (0−2)

Wykaż, że ułamek

$$\frac{1}{27}$$

Jest ułamkiem okresowym, którego okres zawiera trzy cyfry sumujące się do 10.

Odpowiedź

Zadanie 8. (0−2)

Dany jest zbiór n-osób. **Wykaż, że losowanie trzech osób ze zwracaniem można wykonać na $3n^2 - 2n$ sposobów więcej niż gdyby wykonać to losowanie bez zwracania.**

Odpowiedź

Zadanie 9. (0–2)

Liczbę naturalną nazwiemy niesforną, jeżeli przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1, oraz gdy przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. **Wykaż, że cyfra jedności każdej liczby niesfornej to 7.**

Odpowiedź

Zadanie 10. (0–2)

Liczbę naturalną nazwiemy idealną, jeżeli jest iloczynem dokładnie trzech różnych liczb pierwszych. **Wykaż, że czwartą najmniejszą liczbą idealną jest 70.**

Odpowiedź

Zadanie 11. (0–2)

Wykaż, że czterocyfrowych liczb niepodzielnych przez 3 jest tyle samo co liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 15.

Odpowiedź

Zadanie domowe

Zadanie domowe 1. (0−1)

Wykaż, że liczba

$$6^{14}$$

Jest większa od liczby

$$35^{7}$$

Odpowiedź

Zadanie domowe 2. (0−2)

Wykaż, że liczba

$$6,7(89)$$

Jest wymierna.

Odpowiedź

Zadanie domowe 3. (0−2)

Liczbę naturalną nazywamy zabawną, gdy przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3, a jej ostatnia cyfra to 7. Wykaż, że istnieją przynajmniej dwie liczby zabawne.

Obliczenia

Zadanie domowe 4. (0−2)

Wykaż, że liczba

$$\frac{\mathbf{0,708(3)}}{\mathbf{0,791(6)}}$$

Jest ilorazem liczb pierwszych.

Odpowiedź

Zadanie domowe 5. (0−2)

Uzasadnij, że jedynymi liczbami naturalnymi spełniającymi równanie

$$\mathbf{a + b\sqrt{5} = \sqrt{10}}$$

Jest para liczb $\mathbf{a = 0}$ i $\mathbf{b = 0}$.

Odpowiedź

Zadanie domowe 6. (0−2)

Niech n będzie liczbą naturalną dodatnią. Liczbę nazwiemy kapryśną, jeżeli składa się z cyfr $2, 3, 5$ lub 7. **Wykaż, że różnica najmniejszej i największej n-cyfrowej liczby kapryśnej jest liczbą kapryśną.**

Odpowiedź

Zadanie domowe 7. (0−2)

Uzasadnij, że dla dowolnej pary liczb rzeczywistych x oraz y prawdziwa jest nierówność.

$$(\sqrt{5}-2)y^4+5x^2 \geq 0$$

Odpowiedź